(11)

Rouvière, page 142

Méthode de Newton

Théorème Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 avec $a < b$; $f(a) < 0 < f(b)$ et $f' > 0$ sur $[a,b]$.
Considérons la suite récurrente définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $g : x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On obtient alors :

(i) f s'annule en un unique point c et il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x_0 \in I = [c-\alpha, c+\alpha]$, la suite converge quadratiquement vers c

(ii) si de plus, $f'' > 0$ sur $[a,b]$ alors le résultat du (i) est vrai avec $I = [c,b]$, $(x_n)_n$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - c \sim \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(c)}(x_n - c)^2$

· Heuristique : — plutôt le faire à la fin, comme ça fait + ou - vite selon le tps restant

Pour résoudre $f(x) = 0$ on cherche à transformer l'équation en un problème de point fixe, de la forme $g(x) = x$. Cela peut se faire en prenant par exemple $g(x) = x + \lambda(x) f(x)$ avec λ ne s'annulant pas.
La convergence des itérés $x_{n+1} = g(x_n)$ vers la solution c cherchée sera très rapide si le point est superattractif i.e. $g'(c) = 0$. Or $g'(c) = 1 + \lambda(c) f'(c)$ ce qui incite à prendre $\lambda = \frac{-1}{f'}$.

car $f(c) = 0$

· Démonstration du (i) :

L'existence d'un unique point annulateur de la fonction f sur $]a,b[$ est assurée par le théorème des valeurs intermédiaires et la croissance stricte de la fonction.

f est $C^2 \Rightarrow f$ est C^0

Pour tout $x \in [a,b]$,

$$g(x) - c = x - c - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-c)f'(x) - f(x) + f(c)}{f'(x)} \quad \text{car } f(c) = 0$$

Or, d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $y \in]c;x[$ tel que :

$]x,c[$ si $x < c$, $]c,x[$ sinon

$$f(c) = f(x) + (c-x)f'(x) + \frac{(x-c)^2}{2} f''(y)$$

Donc :

$$g(x) - c = \frac{(x-c)^2}{2}\frac{f''(y)}{f'(x)} \quad \text{donc : } |g(x) - c| \leqslant k|x-c|^2 \quad \text{avec } k = \frac{\max|f''|}{2\min|f'|}$$

Considérons $\alpha > 0$ tel que $k\alpha < 1$ et $I = [c-\alpha, c+\alpha] \subset [a,b]$, on obtient alors :

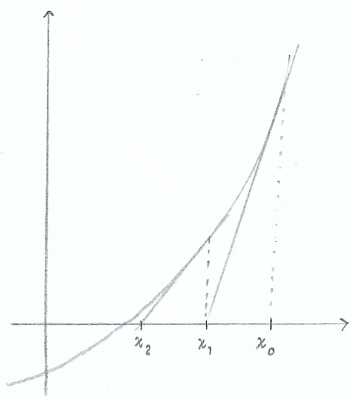
$\forall x \in I$, $|g(x) - c| \leqslant k|x-c|^2 \leqslant k\alpha^2 < \alpha$ donc I est stable par g, en considérant $x_0 \in I$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |x_{n+1} - c| \leqslant k|x_n - c|^2$$

Ainsi, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ k|x_n - c| \leqslant (k|x_0 - c|)^{2^n} \leqslant (k\alpha)^{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{car } k\alpha < 1$$

On obtient donc une convergence quadratique de $(x_n)_n$ vers c.



· Démonstration du (ii) :

Supposons que $f'' > 0$ sur $[a,b]$.

Pour tout $x \in [c,b]$,

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant x \quad \text{avec inégalité stricte si } x > c$$

$$g(x) - c = \frac{1}{2}\frac{f''(y)}{f'(x)}(x-c)^2 \geqslant 0 \quad \text{avec inégalité stricte si } x > c$$

Donc :

$J =]c,b]$ est stable par g ; pour $x_0 \in J$ les itérés $x_n \in J$, $(x_n)_n$ est strictement décroissante

Au même titre qu'en (i),

$$0 \leqslant x_{n+1} - c \leqslant k(x_n - c)^2 \quad \text{on a convergence quadratique}$$

De plus,

$$\frac{x_{n+1} - c}{(x_n - c)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(y_n)}{f'(x_n)} \quad \text{avec } y_n \in]c, x_n[$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(c)} \quad \text{par continuité de } f' \text{ et } f'' \text{ en } c$$